1 Fundamental Concepts. Vectors

1.1 Introduction

고전역학(classical mechanics) : Newton식 시간(time), 공간(space) 개념으로 보는 절대적인 시간에 따라 공간에서 물체의 움직임을 다루는 과학.

기본적인 개념

- 1. 공간(space),시간(time),질량(mass) : 3 가지의 기본 물리량, 기본량
- 2. 물리학에서는 기본 물리량으로 존재(存在)를 기술한다.

  존재의 존재방식 : 공간, 시간

  존재 : 질량

  - 존재하는 모든 것은 질량을 갖는다.
  - 물질은 질량을 갖는다.
  - 복사에너지(존재)도 질량을 갖는다.

좌표계(Coordinate System)

- 1.공간상의 물체의 위치 정의
- 2.기준점: 좌표의 원점 , 좌표 :척도

Newton의 절대시간, 절대공간의 개념

Philosophie Naturalis Principia Mathematica, 1687년

- ‘절대적이고 진실로 수학적인 시간은 자연스럽게, 또 속성상 외부와 아무 관련 없이 잔잔히 흐른다. 그래서 다른 이름으로 지속시간이라고도 한다. 절대공간도 속성상 외부와 아무런 관련 없이 항상 유사하고 또한 부동의 상태로 있다.’

Math(1838～1916) The Science of Mechanics

'A critical and Historical Account of its Development(1907)'

- Newton은 관측 가능한 현상에서 직접 추론하거나 이에서 유도할 수 있는 결과 이외에는 아무것도 과학이론의 기본 전제로 받아들이지 않는다. 즉 ‘어떤 가정도 설정하지 않는다.’고 천명하였는데 실제로는 정반대로 행동했다. : Math의 주장(Newton에 대한 비판)
- Newton의 시간과 공간에 대한 이러한 이율배반적인 태도는 ‘현상으로 설명하거나 귀납적으로 추론할 수 없어서’ 도저히 다른 방도가 없었기 때문이라고 볼 수 있겠다. 그러나 ‘어떤 가정도 설정하지 않는다.’는 법칙에 (철저히) 따르지 못했다.

Minkowski(1908), 시간과 공간에 대한 새로운 패러다임

- '여러분! 내가 지금 여러분에게 말씀드리는 시간과 공간에 대한 견해는 실험물리학이라는 토양에서 싹튼 것이기에 강한 힘을 가지고 있습니다. 이것은 혁명적인 생각입니다. 지금부터는 공간만의 자체, 시간만의 자체는 각각 따로 아무 의미가 없고 어둠속으로 사라져야 합니다. 오직 시간과 공간이 한 결합체로서 독립성을 갖게 될 것입니다.'

1.2 측정단위 : 시간과 공간의 척도(scale)

- 시간과 위치 : 좌표계의 원점에 대한 세 개의 좌표(x,y,z)
- 길이 : 두 점이 공간적으로 분리된 정도를 어떤 표준 길이의 단위로 표현한 것.

길이 단위

적도에서 북극까지 거리의 $\frac{1}{10^7}$을 1m로 정했다.

$$\frac{1}{2}\pi R_E = 10^7 \mathrm{m}$$

$$R_E = \frac{2\times 107\mathrm{m}}{\pi} = 6.366\times 10^6 \mathrm{m}$$: 지구의 반경

◉표준원기

- X 자 모양의 단면을 가진 백금-이리듐 합금의 막대위에 새긴 두 눈금 사이의 거리를 1m로 정했다

◉1960년 제 11차 국제도량형 총회

- 미터(meter)는 진공에서 Kr^{86}원자의 두 준위 $2P^{10}$과 $5d^5$사이의 전이에 해당하는 파동의 1,650,763.73 파장에 해당하는 길이

◉1983년 이후, 현재의 길이의 표준

- 1 m는 진공 중에서 빛이 $\frac{1}{299,792,485}$초 동안 진행하는 거리

◉빛의 속도

$c = 299,792,485\mathrm{m/s}$(exact value)

→ 길이의 표준은 시간의 표준에 의존한다.

시간단위

- 주기운동으로부터 시간의 단위를 취한다.
- 물체의 공간운동으로부터 시간이 정해진다.

1) 천체의 운동 : 日, 月, 年

2) 日, 時, 分, 秒

◉세슘시계

- 시간의 표준, 10^{-12}의 정밀도
- 1sec : 133Cs 원자의 두 초미세구조간의 전이에 대응하는 복사의 9,192,631,770 주기의 시간

질량단위

◉kg원기 : France의 국제도량형국에 있는 kg 원기의 질량

1.3 Notation, Formal Definitions and Rules of Vector Algebra

(표기법, 벡터 대수학의 형식적 정의와 규칙)

vector 의 표시 , $\vec{A}$ ***A***, ***a***

vector 의 성분

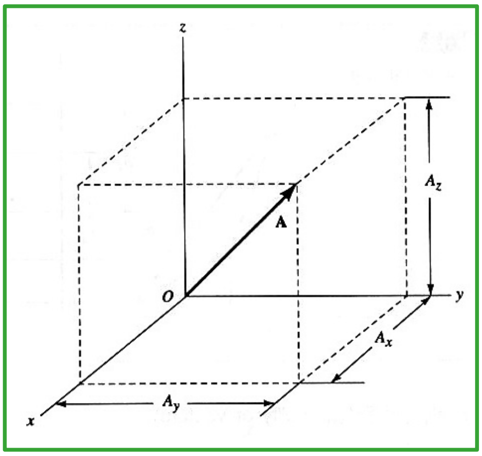
$A_x = A\cos\theta$: $\vec{A}$의 x방향 성분

$\vec{A} = [A_x, A_y, A_z]$

A_x : $\vec{A}$의 x-성분, x-축에 대한 정사영

A_y : $\vec{A}$의 x-성분,

A_z : $\vec{A}$의 z-성분,

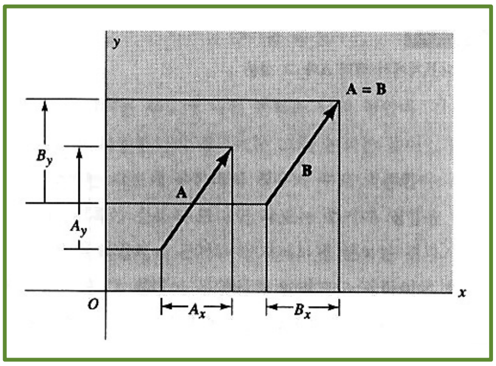


Ⅰ. Vector 의 동등성

$\vec{A} = \vec{B}$ or $[A_x, A_y, A_z] = [B_x, B_y, B_z]$

의미 $A_x = B_x$, $A_y = B_y$, $A_z = B_z$

- 1. 두 vector의 각각의 성분이 같을 때 -> 두 vector는 같다.
- 2. 서로 평행하고 길이가 같은 vector
- 3. 같은 위치에 있지 않아도 된다.
- 4. 같은 두 Vector 로 모든 면에서 동등한 필요는 없다.

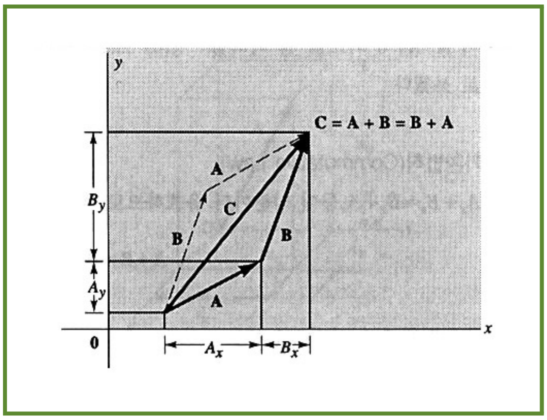


Ⅱ vector 의 더하기

$$\vec{A}+\vec{B}=[A_x,A_y,A_z]+[B_x,B_y,B_z]$$
$$=[A_x+B_x,\ A_y+B_y,\ A_z+B_z]$$

평행 사변형법

$$\vec{C}=\vec{A}+\vec{B}$$



Ⅲ Vector 와 scalar 의 곱

$$C\vec{A}=C[A_x,A_y,A_z]=[CA_x,CA_y,CA_z]$$

$C\vec{A}$: 1) $\vec{A}$ 의 방향

2) $|\vec{A}|$ 의 C 배 크기

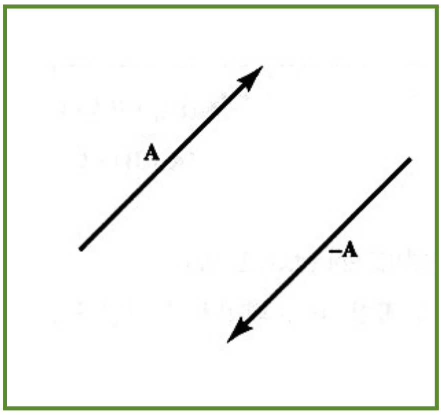
$-\vec{A}$: 1) $\vec{A}$ 의 반대방향

2) $|\vec{A}|$ 크기

Ⅳ Vector 빼기

$$\vec{A}-\vec{B}=\vec{A}+(-1)\vec{B}=[A_x-B_x,\ A_y-B_y,\ A_z-B_z]$$

$\vec{A}$ 에 $(-1)\vec{B}$ 를 더한다.



Ⅴ 0(zero) Vector

$0=\vec{A}-\vec{B}$ 표기 $\vec{0}=0$

Ⅵ 더하기의 교환법칙

$$\vec{A}+\vec{B}=\vec{B}+\vec{A}$$

Ⅶ (the associate law)

$$\vec{A}+(\vec{B}+\vec{C})=(\vec{A}+\vec{B})+\vec{C}$$

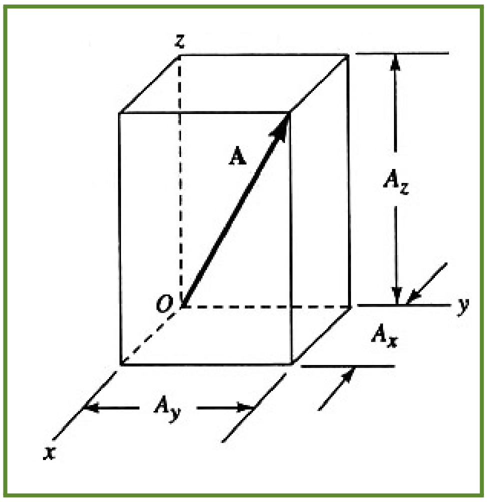
Ⅷ the distributive law

$$C(\vec{A}+\vec{B})=C\vec{A}+C\vec{B}$$

Ⅸ vector 의 크기

$\vec{A}$의 크기 :$|\vec{A}|$,A

$$\vec{A}=|\vec{A}|=\sqrt{A_x^2+A_y^2+A_z^2}$$

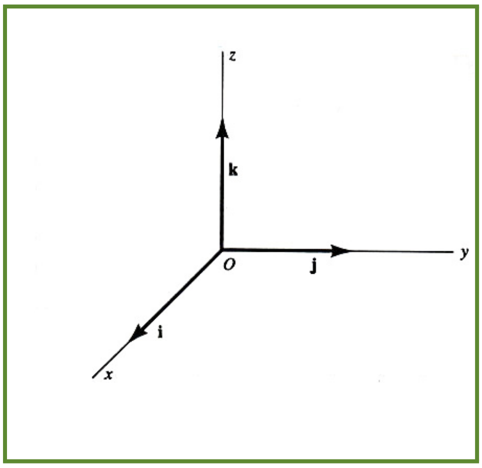


X 좌표계의 단위벡터(unit vector)

- 크기가 1인 벡터 ,기본 벡터(Base vector)
- 단위좌표vector(unit coordinate vector)

$\hat{e_x}=[1,0,0],\ \hat{e_y}=[0,1,0],\ \hat{e_z}=[0,0,1]$

$\vec{A}=\hat{e_x}A_x+\hat{e_y}A_y+\hat{e_z}A_z$



- cartesian unit vector

$\hat{i}=\hat{e_x}$, $\hat{j}=\hat{e_y}$, $\hat{k}=\hat{e_z}$

Example 1.1

$\vec{A}=[1,0,2]$, $\vec{B}=[0,1,1]$ 두 벡터의 합과 크기

$\vec{A}+\vec{B}=[1,1,3]$

$|\vec{A}+\vec{B}|=\sqrt{(1^2+1^2+3^{2)}}=\sqrt{11}$

Example 1.2

위 두 벡터의 차를 $\hat{i},\hat{j},\hat{k}$ 로 표시 하여라

$\vec{A}-\vec{B}=[1,-1,1]=\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$

1.4 the scalar product

- scalar product ,dot product

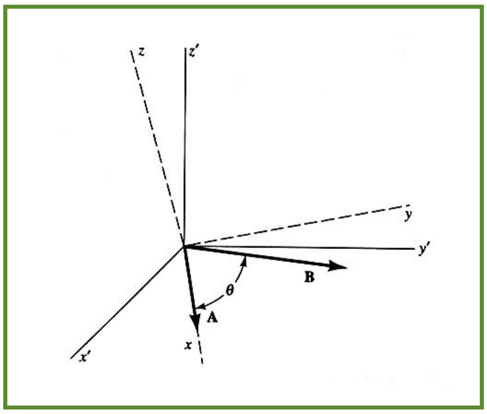
$\vec{A}\cdot\vec{B}=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z$

1)스칼라 곱은 교환 법칙이 성립한다.

$\vec{A}\cdot\vec{B}=\vec{B}\cdot\vec{A}$ $(\because A_xB_x=B_xA_x)$

2) $\vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C})=\vec{A}\cdot\vec{B}+\vec{A}\cdot\vec{C}$

$\vec{A}\cdot\vec{B}=AB\cos\theta$



x-축을 $\vec{A}$와 나란히 하고 z-축은 $\vec{A},\vec{B}$ 평면과 수직이 되도록 취한다.

$\vec{A}=(A,0,0),\ \vec{B}=(B_x,B_y,0)=(B\cos\theta,B\sin\theta,0)$

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=A_xB_x=A(B\cos\theta)=|\vec{A}|\ |\vec{B}|\cos\theta \qquad (1.4.5)$$

$$\cos\theta=\frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{A}|\ |\vec{B}|}=\frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{AB} \qquad (1.4.6)$$

$\vec{B}$의 길이에 $\vec{A}$의 $\vec{B}$방향 정사영을 곱한 것과 같다.

$$\hat{e}_i\cdot\hat{e}_j=\delta_{ij} \quad \delta_{ij}\rightarrow \begin{array}{l} =1(i=j) \\ =0(i\neq j)\end{array}$$

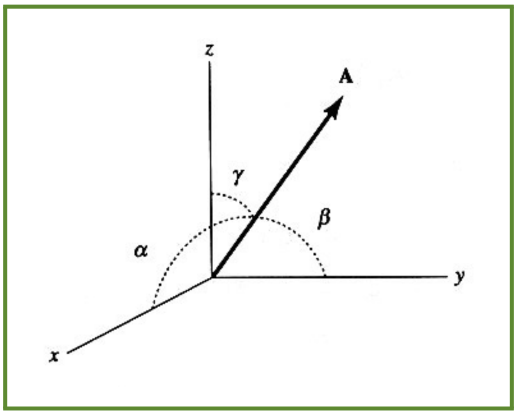
$$\begin{aligned}\vec{A}\cdot\vec{B}&=(\vec{i}A_x+\vec{j}A_y+\vec{k}A_z)\cdot(\vec{i}B_x+\vec{j}B_y+\vec{k}B_z)\\ &=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z\end{aligned}$$

🍌 from (분배법칙 & 스칼라 곱의 정의)

if $\vec{A}\cdot\vec{B}=0$ then $\vec{A}\perp\vec{B}$

🍌 *벡터 $\vec{A}$ 량의 크기를 제곱한 것은 $A^2=\vec{A}\cdot\vec{A}=|A|^2$ A^2은 $\vec{A}\cdot\vec{A}$로 간주하라!

방향여현 (direction coordinate)



$$\begin{aligned}\vec{A}&=\vec{i}A_x+\vec{j}A_y+\vec{k}A_z\\ &=A(\vec{i}\frac{A_x}{A}+\vec{j}\frac{A_y}{A}+\vec{k}\frac{A_z}{A})\end{aligned}$$

$$\frac{A_x}{A}=\cos\alpha,\ \frac{A_y}{A}=\cos\beta,\ \frac{A_z}{A}=\cos\gamma,$$

🍌 방향여현(direction cosine)

$\alpha,\ \beta,\ \gamma,$: 방향각도 (direction angle)

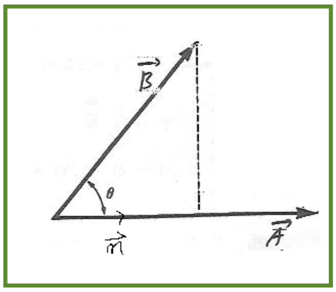
$$\vec{A}=A(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$$

임의 vector 의 단위 vector ,

$$\vec{A}=A\vec{n}$$

$$\vec{n}=\frac{\vec{A}}{A}=\vec{i}\frac{A_x}{A}+\vec{j}\frac{A_y}{A}+\vec{k}\frac{A_z}{A}=\vec{i}\cos\alpha+\vec{j}\cos\beta+\vec{k}\cos\gamma,$$

$\vec{n}$: 임의 벡터의 단위벡터

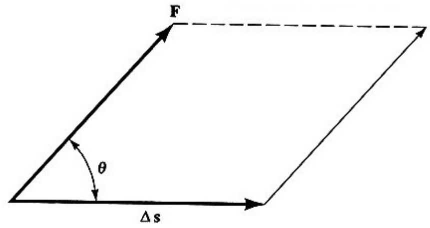


또 다른 벡터 $\vec{B}$ 를 생각한다. $\vec{A}$ 에 관한 $\vec{B}$ 의 정사영은

$$B\cos\theta=\frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{A}=\vec{B}\cdot\vec{n} \qquad (\vec{A}=A\vec{n})$$

Example 1.4.1 벡터의 성분 : 일

$\vec{F}$ 가 물체에 작용하여 $\Delta\vec{s}$ 변위를 일으킴

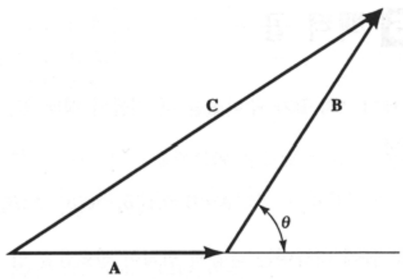


$$\Delta w = (F\cos\theta)\Delta s$$

🍌 일은 (변위 방향의 힘의 성분) × (변위 의 크기)

$$\Delta w = \vec{F} \cdot \Delta\vec{s}$$

Example 1.4.2 코사인법칙



$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$$

$$\vec{C} \cdot \vec{C} = (\vec{A}+\vec{B}) \cdot (\vec{A}+\vec{B})$$
$$= \vec{A} \cdot \vec{A} + 2\vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{B} \cdot \vec{B}$$

$C^2 = A^2 + 2AB\cos\theta + B^2$: 코사인 법칙

$$\vec{B} = \vec{A} + \vec{C}$$

$$\vec{B} - \vec{A} = \vec{C} \quad \Rightarrow \quad A^2 - 2AB\cos\theta + B^2 = C^2$$

Example 1.4.3 정육면체의 부피 대각선이 옆면의 이웃 대각선과 이루는 각도

$\vec{A} = (1,1,1)$: 부피 대각선, $\vec{B} = (1,1,0)$: 한 옆면의 대각선

$$\cos\theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{AB} = \frac{1+1+0}{\sqrt{3}\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{2}{3}} = 0.8165$$

Example 1.4.4

두 벡터가 수직이다.

$a\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ 와 $\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$

$$(a\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}) \cdot (\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}) = a + 2 + 3 = a + 5 = 0$$

$$a = -5$$

1-5 벡터 곱

벡터 곱의 정의

$$\vec{A}\times\vec{B}=(A_yB_z-A_zB_y,\ A_zB_x-A_xB_z,\ A_xB_y-A_yB_x) \qquad (1.5.1)$$

$$\vec{A}\times\vec{B}=-\vec{B}\times\vec{A} \qquad (1.5.2)$$

$$\vec{A}\times(\vec{B}+\vec{C})=\vec{A}\times\vec{B}+\vec{A}\times\vec{C} \qquad (1.5.3)$$

$$n(\vec{A}\times\vec{B})=(n\vec{A})\times\vec{B}=\vec{A}\times(n\vec{B}) \qquad (1.5.4)$$

$$\vec{i}\times\vec{j}=(0-0,0-0,1-0)=(0,0,1)=\vec{k} \qquad (1.5.6)$$

$$\begin{aligned}&\vec{i}\times\vec{j}=-\vec{j}\times\vec{i}=\vec{k} \qquad (1.5.5)\\&\vec{j}\times\vec{k}=-\vec{k}\times\vec{j}=\vec{i}\\&\vec{k}\times\vec{i}=-\vec{i}\times\vec{k}=\vec{j}\\&\vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=0\end{aligned}$$

$$\vec{A}\times\vec{B}=\vec{i}(A_yB_z-A_zB_y)+\vec{j}(A_zB_x-A_xB_z)+\vec{k}(A_xB_y-A_yB_x) \qquad (1.5.8)$$

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix} \qquad (1.5.9)$$

if $\vec{A}=c\vec{B}$ then $\vec{\mathrm{A}}\times\vec{\mathrm{B}}=0$: 두 평행한 벡터의 벡터 곱은 '0'이다.

벡터 곱의 크기

$$\begin{aligned}|\vec{A}\times\vec{B}|^2&=(A_yB_z-A_zB_y)^2+(A_zB_x-A_xB_z)^2+(A_xB_y-A_yB_x)^2\\&=(A_x^2+A_y^2+A_z^2)(B_z^2+B_y^2+B_z^2)-(A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z)^2\end{aligned} \qquad (1.5.11)$$

$$|\vec{A}\times\vec{B}|^2=A^2B^2-(\vec{A}\cdot\vec{B})^2 \qquad (1.5.12)$$

$$|\vec{A}\times\vec{B}|=AB(1-\cos^2\theta)^{1/2}=AB\sin\theta \qquad (1.5.13)$$

$\vec{C}=\vec{A}\times\vec{B}$ 이면 $\vec{C}\perp\vec{A}$ and $\vec{C}\perp\vec{B}$

$$\begin{aligned}\vec{A}\cdot\vec{C}&=A_xC_x+A_yC_y+A_zB_z\\&=A_x(A_yB_z-A_zB_y)+A_y(A_zB_x-A_xB_z)+A_z(A_xB_y-A_yB_x)\\&=0\end{aligned} \qquad (1.5.14)$$

$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$

$\vec{A} \times \vec{B}$

1) $\vec{A}$ 와 $\vec{B}$ 의 vector 곱

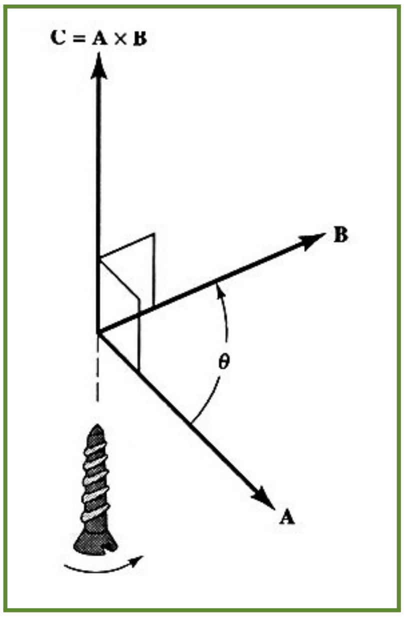
2) $\vec{A}$ cross $\vec{B}$

3) 결과도 또 다른 vector $\vec{C}$

4) 방향 : 오른나사 진행 방향

$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$

- 1) 크기 $|\vec{A} \times \vec{B}| = AB\sin\theta$, 평행 사변형의 넓이
- 2) 방향 오른 나사 진행 방향



Example 1.5.1

$$\vec{A} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} \quad , \quad \vec{B} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \vec{i}(2-1) + \vec{j}(-1-4) + \vec{k}(-2-1) = \vec{i} - 5\vec{j} - 3\vec{k}$$

Example 1.5.2

$\vec{A}$, $\vec{B}$를 포함하는 면에 수직인 단위 vector $\vec{n}$

$$\vec{n} = \frac{\vec{A} \times \vec{B}}{|\vec{A} \times \vec{B}|} = \frac{\vec{i} - 5\vec{j} - 3\vec{k}}{\sqrt{1^1 + 5^2 + 3^2}} = \frac{1}{\sqrt{35}}(\vec{i} - 5\vec{j} - 3\vec{k})$$

Example 1.5.3

그림 1.4.1의 좌표계를 이용하여 $\vec{A} \times \vec{B}$는 $\vec{A}$, $\vec{B}$에 수직이고 크기가 $AB\sin\theta$임을 밝혀라.

$$\vec{A} = (A,0,0) \text{ and } \vec{B} = (B\cos\theta, B\sin\theta, 0)$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A & 0 & 0 \\ B\cos\theta & B\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = \vec{k} AB\sin\theta$$

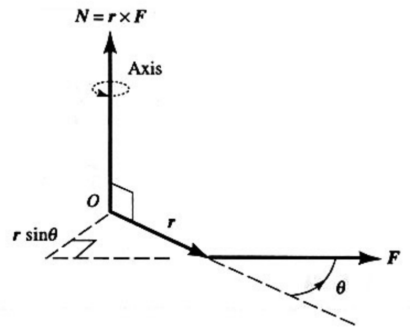
1.6 벡터 곱 의 예 : 힘의 모멘트

torque vector

$$\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F} \qquad (1.6.2)$$

$$|\vec{N}| = rF\sin\theta$$

(1.6.3)



회전에 관한 평형 조건

$$\sum_i (\vec{r_i} \times \vec{F_i}) = \sum_i \vec{N_i} = 0 \qquad (1.6.4)$$

1-7 벡터의 삼중 곱

삼중 스칼라 곱

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \begin{bmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{bmatrix}$$

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C}$$

삼중 벡터 곱

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$$

🍌 BACK minus CAB rule

Example 1.7.1

$$\vec{A} = \vec{i} \quad , \quad \vec{B} = \vec{i} - \vec{j} \quad , \quad \vec{C} = \vec{k}$$

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 1(-1+0) = -1$$

Example 1.7.2

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B}) = -\vec{k}$$

Example 1.7.3

삼중 벡터 곱은 비결합적(non-associative)이다.

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = -\vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = -\vec{a}(\vec{c} \cdot \vec{b}) + \vec{b}(\vec{c} \cdot \vec{a})$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) - (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a}(\vec{c} \cdot \vec{b}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

🍌 이 식이 ‘0’일 필요는 없다.

1-8 좌표계의 변환, 변환 행렬

동일한 벡터를 다른 좌표계에서 어떻게 표현하나?

벡터 $\vec{A}$는 ijk-좌표계에서 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\vec{A}=\vec{i}A_x+\vec{j}A_y+\vec{k}A_z$$

그러나 ijk와는 다른 $i'j'k'$-좌표계에 대하여 $\vec{A}$는 다음과 같이 쓸 수 도 있다.

$$\vec{A}=\vec{i}'A_{x'}+\vec{j}'A_{y'}+\vec{k}'A_{z'}$$

변환식

$$\begin{aligned}
A_{x'} &= \vec{A}\cdot\vec{i'} = (\vec{i}\cdot\vec{i'})A_x+(\vec{j}\cdot\vec{i'})A_y+(\vec{k}\cdot\vec{i'})A_z \\
A_{y'} &= \vec{A}\cdot\vec{j'} = (\vec{i}\cdot\vec{j'})A_x+(\vec{j}\cdot\vec{j'})A_y+(\vec{k}\cdot\vec{j'})A_z \\
A_{z'} &= \vec{A}\cdot\vec{k'} = (\vec{i}\cdot\vec{k'})A_x+(\vec{j}\cdot\vec{k'})A_y+(\vec{k}\cdot\vec{k'})A_z
\end{aligned} \tag{1.8.3}$$

$$\begin{aligned}
A_x &= \vec{A}\cdot\vec{i} = (\vec{i'}\cdot\vec{i})A_{x'}+(\vec{j'}\cdot\vec{i})A_{y'}+(\vec{k'}\cdot\vec{i})A_{z'} \\
A_y &= \vec{A}\cdot\vec{j} = (\vec{i'}\cdot\vec{j})A_{x'}+(\vec{j'}\cdot\vec{j})A_{y'}+(\vec{k'}\cdot\vec{j})A_{z'} \\
A_z &= \vec{A}\cdot\vec{k} = (\vec{i'}\cdot\vec{k})A_{x'}+(\vec{j'}\cdot\vec{k})A_{y'}+(\vec{k'}\cdot\vec{k})A_{z'}
\end{aligned} \tag{1.8.4}$$

행렬 표기법

$$\begin{bmatrix} A_{x'} \\ A_{y'} \\ A_{z'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{i}\cdot\vec{i'} & \vec{j}\cdot\vec{i'} & \vec{k}\cdot\vec{i'} \\ \vec{i}\cdot\vec{j'} & \vec{j}\cdot\vec{j'} & \vec{k}\cdot\vec{j'} \\ \vec{i}\cdot\vec{k'} & \vec{j}\cdot\vec{k'} & \vec{k}\cdot\vec{k'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} \tag{1.8.5}$$

- $\vec{A}'=D\vec{A}$, (3×3)행렬을 변환행렬(transformation matrix)라고 한다.
- 동일한 좌표계에서 벡터를 회전하는 것은 벡터에 변환행렬을 작용하는 것과 같다.

y-축 방향으로 θ만큼 회전했을 때의 변환행렬

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$$

두 가지 회전의 결합행렬

첫 번째 z-축 의 회전 ϕ, 두 번째 새로운 y'-축의 회전 θ

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi & \cos\theta\sin\phi & -\sin\theta \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ \sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\theta \end{pmatrix} \quad (1.8.6)$$

Eulerian Angles

$$\begin{array}{ccccccc} (x,y,z) & \rightarrow & (x',y',z') & \rightarrow & (x'',y'',z'') & \rightarrow & (x''',y''',z''') \\ & & z\ axis\ \phi & & x'\ axis\ \theta & & z'\ axis\ \psi \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} \cos\psi\cos\phi-\cos\theta\sin\phi\sin\psi & \cos\psi\sin\phi+\cos\theta\cos\phi\sin\psi & \sin\psi\sin\theta \\ -\sin\psi\cos\phi-\cos\theta\sin\phi\cos\psi & -\sin\psi\sin\phi+\cos\theta\cos\phi\cos\psi & \cos\psi\sin\theta \\ \sin\theta\sin\phi & -\sin\theta\cos\phi & \cos\theta \end{pmatrix}$$

예제 1.8.1

$\vec{A}=3\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$ 를 $x'y'z'$좌표계의 성분으로 나타내어라. $x'y'z'$좌표계는 xyz 좌표의 z축을 회전축으로 45°회전한다.

$$\vec{i}\cdot\vec{i}'=1/\sqrt{2} \quad \vec{j}\cdot\vec{i}'=1/\sqrt{2} \quad \vec{k}\cdot\vec{i}'=0$$
$$\vec{i}\cdot\vec{j}'=-1/\sqrt{2} \quad \vec{j}\cdot\vec{j}'=1/\sqrt{2} \quad \vec{k}\cdot\vec{j}'=0$$
$$\vec{i}\cdot\vec{k}'=0 \quad \vec{j}\cdot\vec{k}'=0 \quad \vec{k}\cdot\vec{k}'=1$$

변환 행렬로부터

$$A_{x'}=\frac{3}{\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{2}}=\frac{5}{\sqrt{2}} \qquad A_{y'}=\frac{-3}{\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{2}}=\frac{-1}{\sqrt{2}} \qquad A_{z'}=1$$

예제 1.8.2

z축으로부터 ϕ만큼 회전된 새 좌표계로 변환하는 행렬을 구하라.

$$\vec{i}\cdot\vec{i}'=\vec{j}\cdot\vec{j}'=\cos\phi$$
$$\vec{j}\cdot\vec{i}'=-\vec{i}\cdot\vec{j}'=\sin\phi$$
$$\vec{k}\cdot\vec{k}'=1$$

$$\begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

직교변환(Orthogonal Transformations)

벡터는 직교변환에 따라 성분이 변하는 양

포물선 : 질량 m을 갖는 투사체, 속도 $\vec{v}$.

투사체의 궤적이 xy-평면에 한정시키면

투사체의 속도를 xy좌표계에서 나타낸다.

$$\vec{v}=\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} v\cos\theta \\ v\sin\theta \end{pmatrix}$$

변환행렬 : $x'y'$좌표계를 θ만큼 돌려서

$$v_x{}' = v,\ v_y{}' = 0$$

이 되었을 때의 좌표변환식은

$$R=\begin{pmatrix} \vec{i}\cdot\vec{i}' & \vec{j}\cdot\vec{i}' \\ \vec{i}\cdot\vec{j}' & \vec{j}\cdot\vec{j}' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$x'y'$좌표계에서의 속도 $\vec{v}'$는

$$\vec{v}' = \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v\cos\theta \\ v\sin\theta \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}' = R\vec{v}$$

$\vec{v}$의 제곱

$$(\vec{v}\cdot\vec{v}) = \overset{\rightrightarrows}{v}\,\vec{v} = (v\cos\theta\ \ v\sin\theta)\begin{pmatrix} v\cos\theta \\ v\sin\theta \end{pmatrix}= v^2\cos^2\theta + v^2\sin^2\theta = v^2$$

🍌 $\overset{\rightrightarrows}{v}$: $\vec{v}$ 의 전치 벡터(the transpose of the column vector $\vec{v}$)

🍌 $\widetilde{A}$: A의 전치행렬

$\vec{v}'$의 제곱

$$(\vec{v}'\cdot\vec{v}') = \overset{\rightrightarrows}{v}'\,\vec{v} = (v\ 0)\begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix}= v^2 + 0^2 = v^2$$

$x'y'$좌표계를 -θ만큼 되돌리는 변환행렬

$$R(-\theta) = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & \sin(-\theta) \\ -\sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\equiv \widetilde{R}$$

$\vec{v}'$를 $\widetilde{R}$로 변환시키면

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v\cos\theta \\ v\sin\theta \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v\cos\theta \\ v\sin\theta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} v\cos\theta \\ v\sin\theta \end{pmatrix}$$

$I=\widetilde{R}R=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$: 단위 연산자(identity operator)

직교행렬 : 전치행렬이 역행렬일 때 이러한 행렬을 직교행렬이라 한다.

$$\widetilde{R}= R^{-1}$$

직교변환 : 전치행렬과 역행렬이 같을 때 변환 좌표변환 R을 직교변환이라고 한다.

🍌 좌표의 회전은 직교변환의 한 예이다.

1.9 벡터의 도함수

$$\vec{A}(u) = \vec{i}A_x(u) + \vec{j}A_y(u) + \vec{k}A_z(u) \tag{1.9.1}$$

$$\frac{d\vec{A}}{du} = \lim_{\Delta u \to 0}\frac{\Delta\vec{A}}{\Delta u} = \lim_{\Delta u \to 0}\left(\vec{i}\ \frac{\Delta A_x}{\Delta u} + \vec{j}\ \frac{\Delta A_y}{\Delta u} + \vec{k}\ \frac{\Delta A_z}{\Delta u}\right)$$

$$\Delta A_x = A_x(u + \Delta u) - A_x(u)$$

$$\frac{d\vec{A}}{du} = \vec{i}\ \frac{dA_x}{du} + \vec{j}\ \frac{dA_y}{du} + \vec{k}\ \frac{dA_z}{du} \tag{1.9.2}$$

- 벡터의 도함수도 또 다른 벡터인데, 이 벡터의 도함수는 그 성분이 보통 도함수인 벡터이다.
- 두 벡터의 합의 도함수는 각 벡터의 도함수의 합과 같다.

$$\frac{d}{du}(\vec{A} + \vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{du} + \frac{d\vec{B}}{du} \tag{1.9.3}$$

벡터 곱의 도함수

$$\frac{d(n\vec{A})}{du} = \lim_{\Delta u \to 0}\frac{n(u+\Delta u)A(u+\Delta u) - n(u)A(u)}{\Delta u}$$

$$\frac{d(\vec{A}\cdot\vec{B})}{du} = \lim_{\Delta u \to 0}\frac{\vec{A}(u+\Delta u)\cdot\vec{B}(u+\Delta u) - \vec{A}(u)\cdot\vec{B}(u)}{\Delta u}$$

$$d(\vec{A}\times\vec{B})du = \lim_{\Delta u \to 0}\frac{\vec{A}(u+\Delta u)\times\vec{B}(u+\Delta u) - \vec{A}(u)\times\vec{B}(u)}{\Delta u}$$

$$\frac{d(n\vec{A})}{du} = \frac{dn}{du}\vec{A} + n\frac{d\vec{A}}{du} \tag{1.9.4}$$

$$\frac{d(\vec{A}\cdot\vec{B})}{du} = \frac{d\vec{A}}{du}\cdot\vec{B} + \vec{A}\cdot\frac{d\vec{B}}{du} \tag{1.9.5}$$

$$\frac{d(\vec{A}\times\vec{B})}{du} = \frac{d\vec{A}}{du}\times\vec{B} + \vec{A}\times\frac{d\vec{B}}{du} \tag{1.9.6}$$

1.10 입자의 위치벡터, 직각좌표계에서의 속도와 가속도

위치벡터(position vector)

$$\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z$$

- 움직이는 입자에 대한 위치벡터의 각 성분은 시간의 함수이다.

$$x = x(t) \quad , \quad y = y(t) \quad , \quad z = z(t)$$

속도 벡터

$\vec{v}$: $\vec{r}$ 의 t 에 대한 도함수

$$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\vec{i}\,\dot{x}+\vec{j}\,\dot{y}+\vec{k}\,\dot{z}$$
$$\Delta\vec{r}=\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)$$
$$\Delta\vec{r}=\vec{i}\,\Delta x+\vec{j}\,\Delta y+\vec{k}\,\Delta z$$
$$\vec{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\frac{d\vec{r}}{dt}$$

- 속도벡터는 운동방향과 운동 변화를 을 함께 나타낸다.
- $\vec{v}$의 방향 // $d\vec{r}$의 방향 -> 운동 경로의 접선 방향

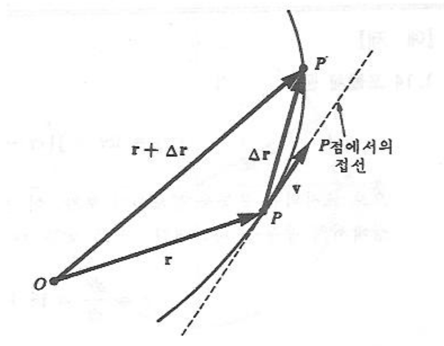


그림 1.12 비 Δr/Δt의 극한으로서 운동하는 질점의 속도벡터.

Speed 속력

$$v=|\vec{v}\,|=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}$$
$$v=\frac{ds}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{(\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2)^{1/2}}{\Delta t}$$

가속도 (acceleration)

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$
$$\vec{a}=\vec{i}\,\ddot{x}+\vec{j}\,\ddot{y}+\vec{k}\,\ddot{z}$$

Example 1.10.1 포사체 운동(projectile motion)

입자의 위치가 시간에 따라 변하는 운동

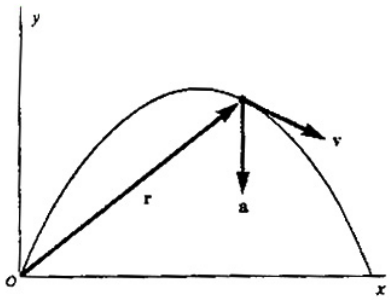
$$\vec{r}(t)=\vec{i}bt+\vec{j}(ct-\frac{gt^2}{2})+\vec{k}0$$

시간으로 미분하여 속도를 얻는다.

$$\vec{v}(t)=\vec{i}b+\vec{j}(c-gt)$$

마찬가지로 가속도는 속도를 미분하여

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=-\vec{j}g$$



등가속도 운동 : (질문) 힘의 방향과 물체의 운동 방향은?

속력

$$v=\sqrt{b^2+(c-gt)^2}$$

Example 1.10.2 원운동

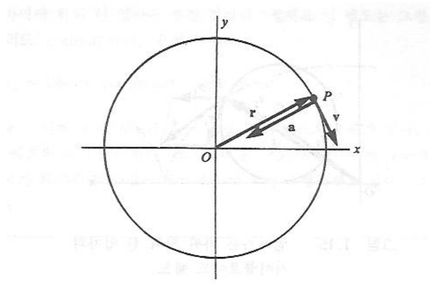


그림 1.14 일정한 속력으로 원궤도에서 운동하는 입자.

$$\vec{r}(t)=\vec{i}\ b\cos\ \omega t+\vec{j}\ b\sin\ \omega t$$

ω: constant

$$r=|\vec{r}\,|=\sqrt{(b\cos\ \omega t)^2+(b\sin\ \omega t)^2}=b$$

$$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=-\vec{i}b\,\omega\sin\ \omega t+\vec{j}\,b\,\omega\cos\omega\, t$$

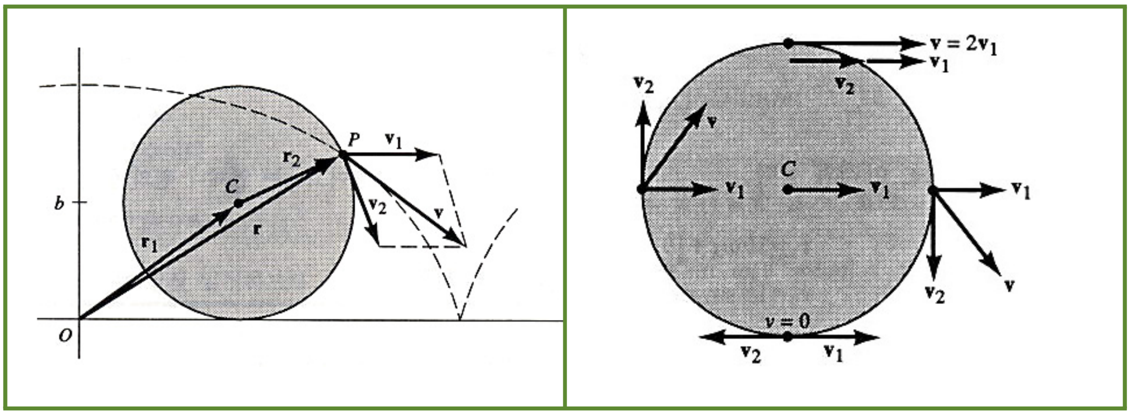
$$v=|\vec{v}\,|=\sqrt{(b\,\omega\sin\ \omega t)^2+(\,b\,\omega\cos\omega\, t)^2}=b\,\omega$$

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=-\vec{i}b\,\omega^2\cos\ \omega t-\vec{j}\,b\,\omega^2\sin\omega\, t=-\omega^2\vec{r}$$

- $\vec{a}=-\omega^2\vec{r}$: $\vec{r}$ 의 반대방향 ,원의 중심방향→구심 가속도
- $\vec{a}\cdot\vec{v}=0$: 속도와 가속도가 수직

Example 1.10.3 굴러가는 바퀴

$$\vec{r}=\vec{r_1}+\vec{r_2}$$



$\vec{r_1}=\vec{i}b\omega t+\vec{j}b$: 일정한 속도로 굴러가는 바퀴 중심의 위치

$\vec{r_2}=\vec{i}b\sin\omega\, t+\vec{j}b\cos\omega t$: 바퀴충심을 기준점(원점)으로 했을 때 의 P점의 위치

$$\vec{v_1}=\frac{d\vec{r_1}}{dt}=\vec{i}\,b\,\omega$$

$$\vec{v_2}=\frac{d\vec{r_2}}{dt}=\vec{i}\,b\,\omega\,\cos\omega t-\vec{j}\,b\omega\sin\omega t \quad \text{원운동}$$

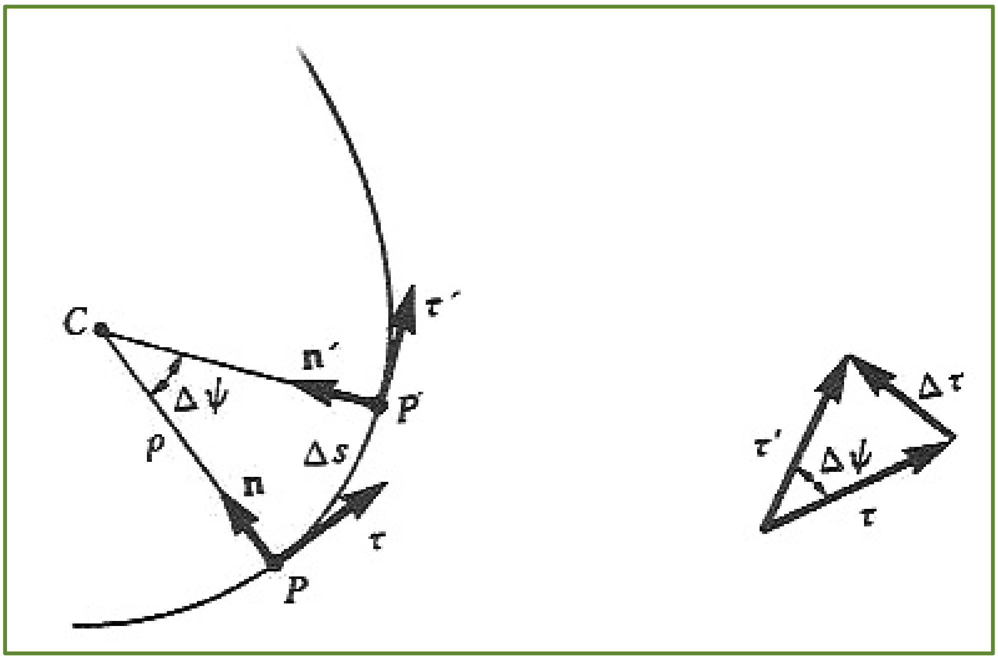
$$\vec{v}=\vec{v_1}+\vec{v_2}=\vec{i}(b\omega+b\omega\cos\omega t)-\vec{j}b\omega\sin\omega t$$

가속도의 접선 성분과 법선성분

입자의 속도

$\vec{v} = v\,\vec{\tau}$

$\vec{\tau}$: 입자운동방향의 단위 벡터



$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(v\,\vec{\tau})}{dt} = \dot{v}\vec{\tau} + v\frac{d\vec{\tau}}{dt}$$

$\frac{d\vec{\tau}}{d\psi} = \vec{n}$: 단위 법선 벡터

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{d\vec{\tau}}{d\psi}\frac{d\psi}{dt} = \vec{n}\frac{d\psi}{ds}\frac{ds}{dt} = \vec{n}\frac{v}{\rho}$$

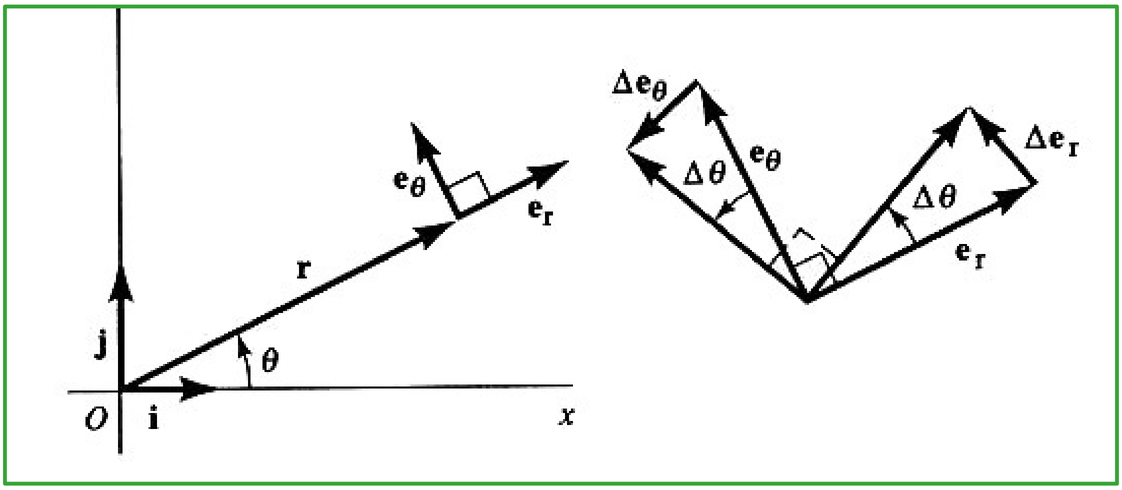
$\rho = \frac{ds}{d\psi}$: p 에서의 곡률 반지름

$$\vec{a} = \dot{v}\vec{\tau} + \vec{n}\,\frac{v^2}{\rho}$$

- $a_\tau = \dot{v} = \ddot{s}$: 접선 가속도
- $a_n = \frac{v^2}{\rho}$: 법선 가속도 ,구심가속도

$$|\vec{a}| = \left|\frac{d\vec{v}}{dt}\right| = \sqrt{\dot{v}^2 + (\frac{v^2}{\rho})^2}$$

1-11 평면 극좌표계에서의 속도와 가속도



극좌표 $r,\ \theta$

위치벡터

$$\vec{r} = \vec{e_r}\, r$$

속도 벡터는

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r}\vec{e_r} + r\frac{d\vec{r_r}}{dt}$$

$$\Delta\vec{e_r} \simeq \vec{e_\theta}\Delta\theta$$

$$\Delta\vec{e_\theta} \simeq -\vec{e_r}\,\Delta\theta$$

$\vec{e_r}$: 1) 동경방향 단위 벡터

2) r=constant 인면에 수직 , r이 증가하는 방향

$\vec{e_\theta}$ 1) θ=constant 인면에 수직 방향의 단위 벡터

2) θ 가 증가하는 방향

$\Delta\vec{e_r} \simeq \vec{e_\theta}\Delta\theta$, 양변에 Δt를 나누고 극한을 취한다.

$$\frac{d\vec{e_r}}{dt} = \vec{e_\theta}\frac{d\theta}{dt}$$

$\Delta\vec{e_\theta} \simeq -\vec{e_r}\,\Delta\theta$ -> $\vec{e_r}$의 반대방향(원점방향)

$$\frac{d\vec{e_\theta}}{dt} = -\vec{e_r}\frac{d\theta}{dt}$$

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e_r} + r\dot{\theta}\vec{e_\theta}$$

🍌 $\dot{r}$: 속도의 동경성분, $r\dot{\theta}$: 속도의 가로 성분

가속도 벡터

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{r}\vec{e_r} + \dot{r}\frac{d\vec{e_r}}{dt} + (\dot{r}\ \dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e_\theta} + r\dot{\theta}\frac{d\vec{e_\theta}}{dt}$$
$$= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e_r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{e_\theta}$$

$a_r = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)$: 동경성분, $a_\theta = (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})$ 가로성분

※ r = b : constant : 원운동

$\dot{r}$=0

$a_r = b\dot{\theta}^2$ $(= r\omega^2)$

$a_\theta = b\ddot{\theta}$ $(= b\alpha)$

Examples 1.11.1

나선형 경로를 따라 꿀벌이 집으로 돌아온다. $r = b - ct$, $\dot{\theta} = kt$

속력의 시간에 따른 함수 ?

$\dot{r} = -c$,$\ddot{r} = 0$

$\vec{v} = \dot{r}\vec{e_r} + r\dot{\theta}\vec{e_\theta}$

$\vec{v} = -c\vec{e_r} + (b - ct)kt\vec{e_\theta}$

∴ 속력 v 로

$v = |\vec{v}| = \sqrt{c^2 + (b-ct)^2 k^2 t^2}$

$r \geqq 0$ 이므로 $t \leqq b/c$ 일 때 타당

Example 1.11.2

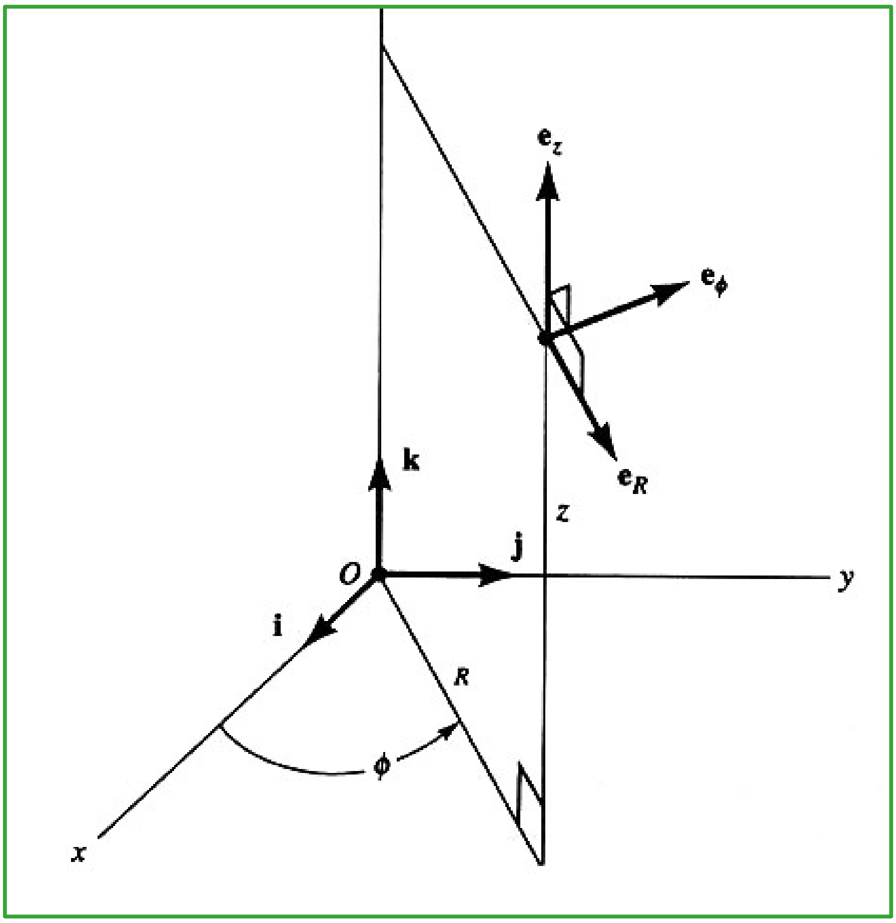
벌레 $r = bt^2$, $\theta = \omega t$: b ,w :일정

$\dot{r} = 2bt$,$\ddot{r} = 2b$,$\dot{\theta} = \omega$,$\ddot{\theta} = 0$

$$\vec{a} = \vec{e_r}(2b - bt^2\omega^2) + \vec{e_\theta}[0 + 2(2bt)\omega]$$
$$= b(2 - t^2\omega^2)\vec{e_r} + 4b\omega t\ \vec{e_\theta}$$

1.12 원통좌표와 구좌표 계에서의 속도와 가속도

원통좌표계(Cylindrical Coordinates)



$$\vec{r} = R\vec{e_R} + z\vec{e_z}$$

평면 극좌표와 같은 방법으로

$$\frac{d\vec{e_R}}{dt} = \vec{e_\phi}\,\dot{\phi} \quad , \quad \frac{d\vec{e_\phi}}{dt} = -\vec{e_R}\,\dot{\phi} \quad , \quad \frac{d\vec{e_z}}{dt} = 0$$

$$\vec{v} = \dot{R}\vec{e_R} + R\dot{\phi}\vec{e_\phi} + \dot{z}\vec{e_z}$$

$$\vec{a} = (\ddot{R} - R\dot{\phi}^2)\vec{e_R} + (2\dot{R}\dot{\phi} + R\ddot{\phi})\vec{e_\phi} + \ddot{z}\vec{e_z}$$

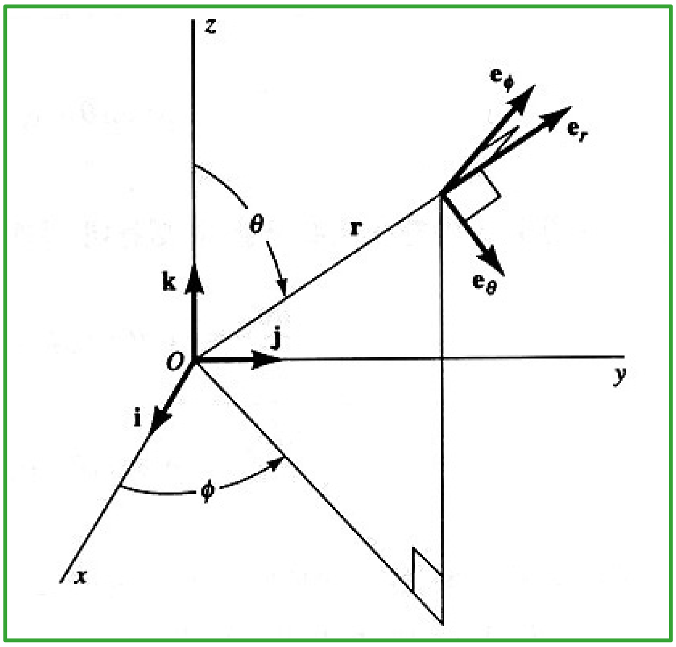
단위벡터

$$\vec{e_R} = \vec{i}\cos\phi + \vec{j}\sin\phi$$

$$\vec{e_\phi} = -\vec{i}\sin\phi + \vec{j}\cos\phi$$

$$\vec{e_z} = \vec{k}$$

구면좌표계(Spherical Coordinates)



$\vec{r} = \vec{e_r}\, r$ 위치벡터

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r}\vec{e_r} + r\,\frac{d\vec{e_r}}{dt}$$

$$\vec{e_r} = \vec{i}(\vec{e_r}\cdot\vec{i}) + \vec{j}(\vec{e_r}\cdot\vec{j}) + \vec{k}(\vec{e_r}\cdot\vec{k})$$

$$\vec{e_r}\cdot\vec{i} = \sin\theta\,\cos\phi$$

$$\vec{e_r}\cdot\vec{j} = \sin\theta\,\sin\phi \quad \text{and} \quad \vec{e_r}\cdot\vec{k} = \cos\theta$$

$$\vec{e_r} = \vec{i}\,\sin\theta\,\cos\phi + \vec{j}\,\sin\theta\,\sin\phi + \vec{k}\,\cos\theta \qquad (1.12.9)$$

$$\vec{e_\theta} = \vec{i}\,\cos\theta\,\cos\phi + \vec{j}\,\cos\theta\,\sin\phi - \vec{k}\,\sin\theta$$

$$\vec{e_\phi} = -\vec{i}\,\sin\phi + \vec{j}\,\cos\phi$$

$$\frac{d\vec{e_r}}{dt} = \vec{i}(\dot{\theta}cos\theta\,\cos\phi - \dot{\phi}\,\sin\theta\,\sin\phi) + \vec{j}(\dot{\theta}cos\theta\,\sin\phi + \dot{\phi}\,\sin\theta\,\cos\phi)$$
$$+\vec{k}\;\dot{\theta}\,\sin\theta$$

식 (1.12.9) 로부터

$$\frac{d\vec{e_r}}{dt} = \vec{e_\phi}\dot{\phi}\,\sin\theta + \vec{e_\theta}\dot{\theta}$$

$$\frac{d\overrightarrow{e_\theta}}{dt} = -\overrightarrow{e_r}\dot{\theta} + \overrightarrow{e_\phi}\dot{\phi}\ \cos\theta$$

$$\frac{d\overrightarrow{e_\phi}}{dt} = -\overrightarrow{e_r}\dot{\phi}\ \sin\theta - \overrightarrow{e_\theta}\dot{\phi}\ \cos\theta$$

따라서

$$\vec{v} = \overrightarrow{e_r}\dot{r} + \overrightarrow{e_\phi}r\dot{\phi}\ \ \sin\theta + \overrightarrow{e_\theta}r\dot{\theta}$$

가속도도 속도의 경우와 같은 방법으로

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2\sin^2\theta - r\dot{\theta}^2)\overrightarrow{e_r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta)\ \overrightarrow{e_\theta}$$
$$+ (r\ddot{\phi}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\phi}\sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta)\overrightarrow{e_\theta}$$

Example 1.12.1

구슬이 나선형 도선에 꿰어 미끄러진다.

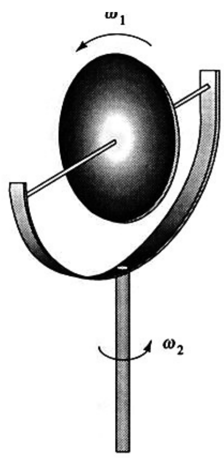
$R = b$, $\phi = \omega t$, $z = ct$ 속도와 가속도는 ?

$\dot{R} = 0$,$\dot{\phi} = \omega$, $\ddot{\phi} = 0$, $\dot{z} = c$, $\ddot{z} = 0$

$\vec{v} = b\omega\overrightarrow{e_\phi} + c\overrightarrow{e_z}$

$\vec{a} = -b\omega^2\overrightarrow{e_R}$

Examples 1.12.2



gimbal mount

ω_1 : 자전 각속도

ω_2 : 연직축의 각속도

1) 바퀴 테 위의 임의의 점의 가속도 , 특히 바퀴 최고점의 가속도

$r = b$, $\theta = \omega_1 t$, $\phi = \omega_2 t$

$\dot{r} = \ddot{r} = 0,\ \dot{\theta} = \omega_1,\ \ddot{\theta} = 0,\ \dot{\phi} = \omega_2,\ \ddot{\phi} = 0$

$$\vec{a} = (-b\omega_2^2\sin^2\theta - b\omega_1^2)\overrightarrow{e_r} - b\omega_2^2\ \sin\theta\cos\theta\overrightarrow{e_\theta} + 2b\omega_1\omega_2\cos\theta\overrightarrow{e_\phi}$$

꼭대기 점의 좌표는 $\theta = 0$이므로 꼭대기 점에서

$$\vec{a} = \underbrace{-b\omega_1^2\overrightarrow{e_r}}_{\text{구심 가속도}} + \underbrace{2b\omega_1\omega_2\overrightarrow{e_\phi}}_{\text{횡가속도}}$$

구심 가속도 횡가속도